EXAMEN ANÁLISIS + MATRICES

10-IV-2012

CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

(a) $a, b, c \Rightarrow \exists$ P. Infl. en $(1,0)$

Tangente en $(1,0)$ $\quad y = -3x + 3$

Condiciones:

1ª.- $f(1) = 0$. [pasa por $(1,0)$]

2ª.- $f''(1) = 0$ [P. Inflex. en ese punto]

3ª.- $f'(1) = -3 \Rightarrow [f'(1) = m_{tgte}]$

Ecuaciones que se derivan de las condiciones:

1ª.- $f(1) = a + b + c = 0$ (I)

3ª.- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(1) = 3a + 2b + c = -3$ (III)

2ª.- $f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a + 2b = 0$ (II) (La simplifico)

Resolvemos el sistema formado por I, II y III:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & a + b + c & = 0 \\ \text{II} & 3a + b & = 0 \\ \text{III} & 3a + 2b + c & = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

III - I: $b + c = -3$; $c = -3 - b$; $\boxed{c = -3 + 3a}$

Sustituimos en I: $a - 3a - 3 + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\boxed{b = -9}$ $\quad \boxed{c = 6}$

2.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$

a) Esboza gráficas y calcula ptos. de corte.

$$f(x) = 4 - 3|x| = \begin{cases} 4 - 3(-x) & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3\cdot(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

$f(x)$ es una función definida a trozos, formada por dos semirrectas, de pendientes $m_1 = +3$ y $m_2 = -3$, que se encuentran en el punto $P(0,4)$, con la tabla de valores siguiente

$g(x) = x^2$ es una parábola de eje coincidente con el de ordenadas, con vértice en el $(0,0)$, que pasa por los puntos indicados en la tabla de valores siguiente

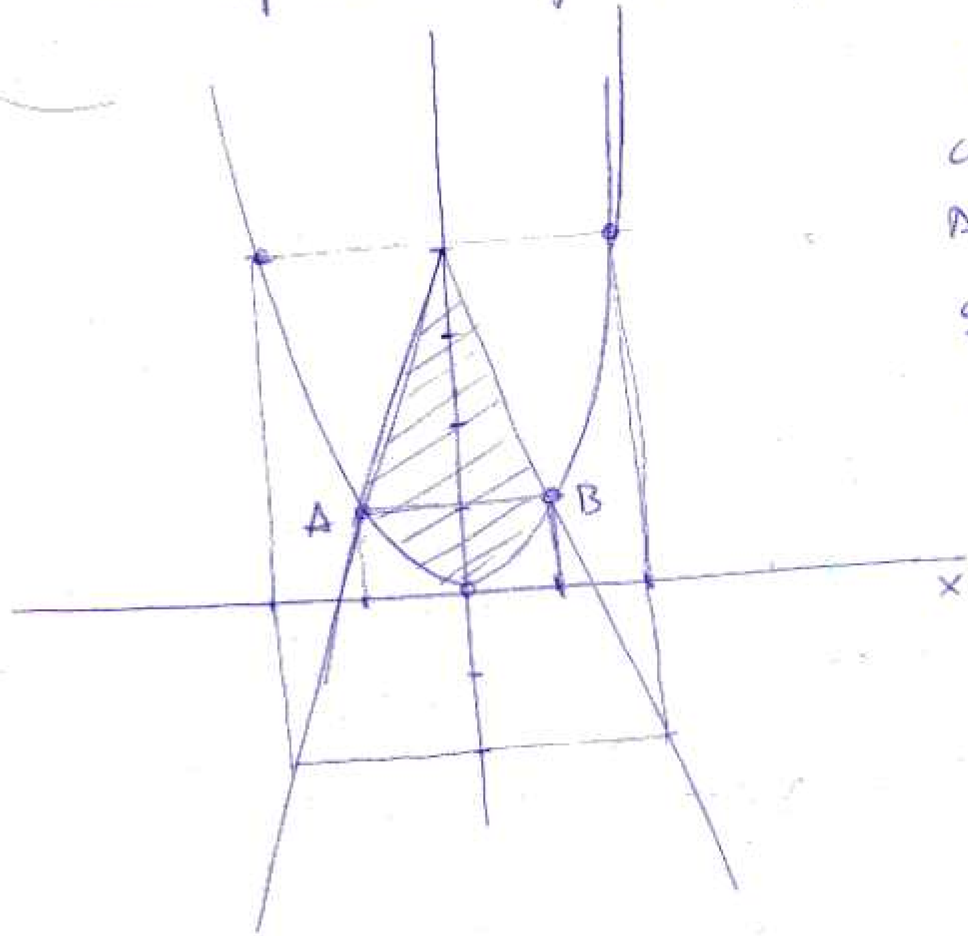
$$f(x) = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-2	-2
-1	1
$x \to 0^-$	$f(x) \to 4^-$
0	4
1	1
2	-2

$g(x) = x^2$

x	$g(x)$
0	0
1	1
2	4
-1	1
-2	4

La representación gráfica quedaría:



Ambas funciones se cortan en dos puntos $A(-1,1)$ y $B(1,1)$, que son el resultado de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4+3x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \text{si } x<0$$

que se resuelve por igualación: $x^2 = 4+3x \Rightarrow$

$$x^2-3x-4=0 \; ; \; x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm 5}{2} \begin{cases} \boxed{x_1 = 4} & \text{No válida pues } x \geq 0 \\ \boxed{x_2 = -1} & \text{válida} \end{cases}$$

De la misma manera resolveremos el sistema formado por $\left.\begin{array}{l} y = 4-3x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \text{si } x \geq 0$, cuya única solución válida es $\underline{x = +1}$.

b) El área del recinto limitado por ambas curvas, es la zona rayada de la gráfica anterior que calcularemos teniendo en cuenta la simetría "par" que presenta:

$$A = 2\int_0^1 \left[4-3x-x^2\right] dx = 2\left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right] =$$

$$= 2\,\frac{24-9-2}{6} = 2\cdot\frac{13}{6} = \boxed{\frac{13}{3}\ u^2}$$

3.- $A+B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}$ $\quad A-B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$

a) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&20\\4&16\end{pmatrix}$,

multiplicando directamente las matrices dadas.

Para calcular A^2-B^2 debemos calcular previamente las matrices A y B a partir de los datos iniciales: si sumamos las ecuaciones matriciales dadas obtenemos: $2A=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$;

$2A=\begin{pmatrix}6&6\\2&4\end{pmatrix}$; $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&6\\2&4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}=A}$

Si las restamos obtendremos: $2B=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix}2&-2\\4&0\end{pmatrix}$; $\boxed{B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}}$

Por tanto: $A^2=\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&15\\5&7\end{pmatrix}$

y $B^2=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$

Finalmente: $A^2-B^2=\begin{pmatrix}12&15\\5&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&16\\3&9\end{pmatrix}$

que claramente difiere del resultado inicial debido a la no conmutatividad del producto de matrices, que impide que $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$ sea igual a A^2-B^2.

b) $XA - XB - (A+B)^t = 2I;$

$$X(A-B) = 2I + (A+B)^t$$

$$X(A-B)(A-B)^{-1} = \left[2I + (A+B)^t\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

$$X = \left[2I + (A+B)^t\right](A-B)^{-1}$$

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$(A-B) = \begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}; \quad |A-B| = 4+4=8; \quad (A-B)^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{|A-B|}\,Adj\left[(A-B)^t\right] = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -4\\ +1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & -1/2\\ 1/8 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right]\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}15 & -18\\ 8 & 0\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}15/8 & -9/4\\ 1 & 0\end{bmatrix} = X}$$

4.-

4.- $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Prueba que $A^3 + I = 0$.

Calculemos A^3.

$A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, al sumar $A^3 = -I$ con la matriz I dará necesariamente la matriz nula.

b) Teniendo en cuenta el apartado a resuelto, calcular A^{10} es bastante fácil, pues:

$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$

Si $A^3 = -I$; $A^9 = (A^3)^3 = [-I]^3 = (-1)^3 \cdot I^3 = -1 \cdot I = -I$

y $A^{10} = -I \cdot A = -A$, por tanto: $\boxed{A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}}$

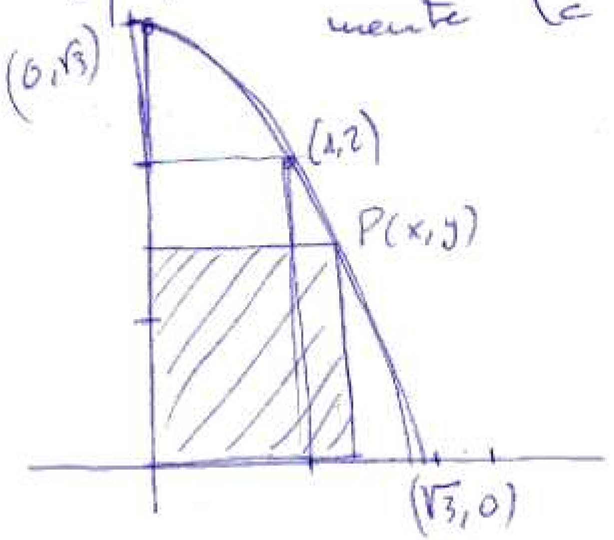
OPCIÓN B

① La gráfica propuesta es una parábola de eje de simetría OY y vértice en (0,3), cóncava (∩), a la que damos algunos valores para representar la parte correspondiente al primer cuadrante:

$y = -x^2 + 3$

x	y
0	3
1	2
2	-1

Corta al eje OX en $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 3 = 0$
$x = \pm\sqrt{3}$, de las que nos interesa únicamente la sol. positiva $(+\sqrt{3}, 0)$



El rectángulo a buscar tiene como función a optimizar la de su área:

$S(x,y) = x \cdot y$

Como $P(x,y)$ debe estar situado en la parábola

$y = -x^2 + 3$, la función que representa el área queda: $S(x) = x(-x^2+3) = 3x - x^3$

Derivamos para calcular el extremo relativo:

$\frac{dS}{dx} = S' = 3 - 3x^2$, que se anula en

$S' = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0$; $3 = 3x^2$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$.

Sólo nos interesa la del primer cuadrante $\Rightarrow x = 1$

Comprobamos el signo de $S'' = -6x$. Para $x = 1$

$S''(1) = -6 < 0$, por tanto será un máximo

 ⇒

Así, el rectángulo pedido tiene de base 1 y altura 2.

$x=1$ $y=-x^2+3$; $y=2$

2º- $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$

Resolvemos primero la integral indefinida por partes:

$I=\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}\,x-\int \text{sen}\,x\,dx = \underline{x\,\text{sen}\,x+\cos x+C}$

$u=x$ $du=dx$

$\cos x\,dx=dv$ $v=\text{sen}\,x$

a la que aplicamos los límites propuestos en la integral definida:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left[x\,\text{sen}\,x+\cos x\right]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[0\cdot\text{sen}\,0+\cos 0\right] = \frac{\pi}{2}\cdot 1+0-1 = \boxed{\frac{\pi}{2}-1}$$

3.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\exists (A-2I)^{-1} \ \forall \lambda \in \mathbb{R} / \ |A-2I| \neq 0 \Rightarrow$

$|A-2I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2 - \lambda^2(\lambda-2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$

Igualamos a cero el resultado del determinante y obtenemos los valores para los que $A-2I$ es singular

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 1 & -2 \\ \lambda=1 & & -1 & 1 & +2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & \underline{|0} \\ \lambda=-1 & & +1 & -2 & \\ \hline & -1 & +2 & \underline{|0} & \\ \lambda=2 & & -2 & & \\ \hline & -1 & \underline{|0} & & \end{array}$$

$\boxed{\text{Por tanto } \exists (A-2I)^{-1} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 1, -1, 2}$

b) $\lambda = -2$

$AX = 2X + I$

$AX - 2X = I.$

$(A-2I) \cdot X = I.$

$(A-2I)^{-1} \cdot (A-2I) X = (A-2I)^{-1} \cdot I$

$\boxed{X = (A-2I)^{-1}}$

$\lambda = -2 \Rightarrow A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ |A-2I| = -(-2)^3 + 2(-2)^2 - 2 - 2 = 12$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{|A-2I|} \cdot Adj\left[A-2I\right]^t$$

$$(A-2I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \boxed{X = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 5/4 \\ \frac{2}{3} & 0 & -1/3 \end{bmatrix}}$$

4.- $\left.\begin{array}{l} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{array}\right\}$

a) Clasificar según los valores de m

Estudiamos para ello el rango de las matrices:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & m \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

rango A: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A \geq 2 \ \forall m \in \mathbb{R}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 2m - 3m = m^2 - 5m$$

El determinante de A: se anula cuando

$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m-5) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 5.$

Así, tendremos:

a1) Si $m=0$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rango } A = 2 \\ \text{rango } A^* = 2 \end{array} \left(\begin{array}{l} \text{La } 1^a \text{ ec. es} \\ \text{el doble de la} \\ 2^a \end{array}\right)$$

Sist. Completo Compatible Indeterminado

Grado de indeterm = 1 (3 inc - rango A)

a2) Si $m=5$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Estudiamos el rango de A^*, para lo que calculamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 - 10 - 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 3$$

Así, el sistema es incompatible para ese valor.

a3) $\forall m \neq 0,\ m \neq 5,\ m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ rango A = rg A^* = nº inc

Sist. Completo Compatible Determinado $\Rightarrow$

Sol. única.

b) Si $m=6$ el sistema tendrá sol. única (compatible determinado). Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer

$|A| = m(m_3 - 5)$ cuando $m=6 \Rightarrow \boxed{|A| = 6(1) = 6}$

El sistema queda:
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ x + 6z = 6 \\ x + y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

y la solución sería:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{36 - 108}{6} = \frac{-72}{6} = \boxed{-12 = x}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{36 - 12}{6} = \frac{24}{6} = \boxed{4 = y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{36 - 12 - 6}{6} = \frac{18}{6} = \boxed{3 = z}$$